工科二年級補考題庫

一、單一選擇題

1. (B)已知 $f(x)=\log_3 x$，若 $f(a)=2$ 且 $f(b)=5$，則 $f(3ab)=?$　(A)7　(B)8　(C)9　(D)10

解析：$\because f(a)=2$ 且 $f(b)=5$

$\therefore \log_3 a=2$ 且 $\log_3 b=5$

故 $f(3ab)=\log_3(3ab)=\log_3 3+\log_3 a+\log_3 b=1+2+5=8$

2. (A)若 $\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}5&6\\8&9\end{vmatrix}+a\times\begin{vmatrix}4&6\\7&9\end{vmatrix}+3\times\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}=3\times\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}+b\times\begin{vmatrix}1&2\\7&8\end{vmatrix}+9\times\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}$，則 $a+b=?$

(A)-8　(B)-4　(C)4　(D)8

解析：對第一列降階展開，$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}5&6\\8&9\end{vmatrix}-2\times\begin{vmatrix}4&6\\7&9\end{vmatrix}+3\times\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}$ 知 $a=-2$

對第三行降階展開，$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=3\times\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}-6\times\begin{vmatrix}1&2\\7&8\end{vmatrix}+9\times\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}$ 知 $b=-6$

故 $a+b=(-2)+(-6)=-8$

3. (A)下列何者有意義？　(A)$\log_2 1$　(B)$\log_1 2$　(C)$\log_2(-1)$　(D)$\log_{-1} 2$

解析：$\log_a b$ 有意義 $\Leftrightarrow \begin{cases}a>0\text{且}a\neq 1\\ b>0\end{cases}$

(B)底數 a 不可為 1

(C)真數 b 不可為 -1

(D)底數 a 不可為 -1

4. (C)已知空間中兩向量 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ ，若 $|\vec{a}|=2$ 、$|\vec{b}|=3$ 、$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{2}$ ，則 $|\vec{a}-\vec{b}|=?$　(A)1　(B)2

(C)4　(D)16

解析：$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=2^2-2\times(-\dfrac{3}{2})+3^2=16$

$\because |\vec{a}-\vec{b}|^2=16$

$\therefore |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{16}=4$

5. (A) 已知 $P(-3,4,-5)$ 為空間中一點，若 P 點到 xy 平面的距離為 a 、 P 點到 z 軸的距離為 b ，則 $a+b=$? (A)10 (B)9 (C)8 (D)7

解析： $a=|-5|=5$ 、 $b=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

故 $a+b=10$

6. (D) 空間坐標中兩向量 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 、 $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ ， θ 為 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角，下列敘述何者正確？ (A) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ (B) $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta|$ (C) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 是向量 (D) $\vec{a}\times\vec{b}$ 是向量

解析：(A)(C)╳： $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 是純量

(B)╳： $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

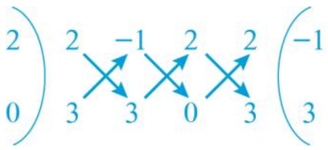
(D)○： $\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix})$ 是向量

7. (B) 若空間中三點 $A(2,-1,0)$ 、 $B(4,1,-1)$ 、 $C(2,2,3)$ 都在平面 E 上，則平面 E 與下列哪個平面平行？ (A) $E_1:3x+2y+2z=0$ (B) $E_2:3x-2y+2z=0$ (C) $E_3:3x-2y-2z=0$ (D) $E_4:3x+2y-2z=0$

解析： $\overrightarrow{AB}=(4-2,1-(-1),(-1)-0)=(2,2,-1)$

$\overrightarrow{AC}=(2-2,2-(-1),3-0)=(0,3,3)$

$\because\ \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 2\\ 0 & 3\end{vmatrix})=(9,-6,6)=3(3,-2,2)$



$\therefore\ (3,-2,2)$ 是平面 E 的法向量

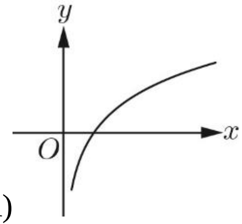
利用點法式，得平面 E 的方程式為 $3(x-2)+(-2)[y-(-1)]+2(z-0)=0$

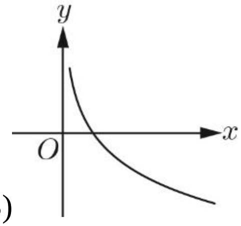
即 $E:3x-2y+2z-8=0$

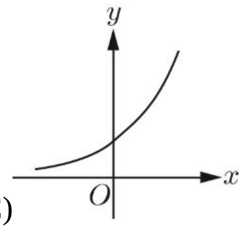
故平面 E 與 $E_2:3x-2y+2z=0$ 平行

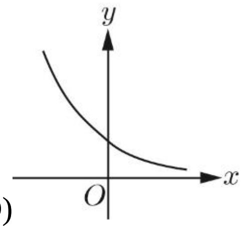
8. (D) 設 $a=\log_3 2$ 、 $b=\log_3 5$ ，則 $\log_{10}25=$? (A) $\dfrac{a+b}{2b}$ (B) a (C) $\dfrac{1}{a}$ (D) $\dfrac{2b}{a+b}$

解析： $\log_{10}25=\dfrac{\log_3 25}{\log_3 10}=\dfrac{\log_3 5^2}{\log_3(2\times5)}=\dfrac{2\log_3 5}{\log_3 2+\log_3 5}=\dfrac{2b}{a+b}$

9. (B) 下列何者可能是 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形？ (A)


(B)


(C)


(D)


解析：$\because$ $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 是嚴格遞減函數且圖形通過點 $(1,0)$，故選(B)

10. (B) 下列敘述何者正確？ (A) $\sqrt{(-3)^2}=-3$ (B) $\sqrt{(-3)^2}=3$ (C) $\sqrt{(-3)^2}=\pm 3$ (D) $\sqrt{(-3)^2}$ 沒意義

解析：$\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3$

11. (C) 設 $a=\sqrt[3]{0.3}$、$b=\sqrt{0.09}$、$c=(0.3)^{-2}$，試問 a、b、c 的大小關係為何？ (A) $a<b<c$ (B) $a<c<b$ (C) $b<a<c$ (D) $c<a<b$

解析：$a=\sqrt[3]{0.3}=(0.3)^{\frac{1}{3}}$、$b=\sqrt{0.09}=\sqrt{(0.3)^2}=0.3=(0.3)^1$

$\because 1>\frac{1}{3}>-2$ 且底數 $0<0.3<1$

$\therefore (0.3)^1<(0.3)^{\frac{1}{3}}<(0.3)^{-2}$，故 $b<a<c$

12. (C) 若 $a>0$ 且 $a-a^{-1}=3$，則 $a^2+a^{-2}=$？ (A)7 (B)9 (C)11 (D)13

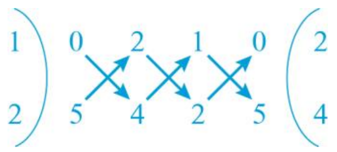
解析：$(a-a^{-1})^2=3^2 \Rightarrow a^2-2\times a\times a^{-1}+(a^{-1})^2=9 \Rightarrow a^2-2+a^{-2}=9 \Rightarrow a^2+a^{-2}=11$

13. (B) 若 $A(1,2,3)$、$B(2,2,5)$、$C(3,7,7)$ 為空間中三點，試問△ABC 面積為何？ (A)5 (B) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ (C)10 (D) $5\sqrt{5}$

解析：△ABC 面積為 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 所張出之平行四邊形面積的一半

$\overrightarrow{AB}=(2-1,2-2,5-3)=(1,0,2)$、$\overrightarrow{AC}=(3-1,7-2,7-3)=(2,5,4)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(\begin{vmatrix}0&2\\5&4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&1\\4&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\2&5\end{vmatrix})=(0-10,4-4,5-0)=(-10,0,5)$



$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-10)^2+0^2+5^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times 5\sqrt{5}=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$

14. (C)已知 $f(x)=3^x$，若 $f(a)=2$ 且 $f(b)=5$，則 $f(a+2b)=?$　(A)12　(B)24　(C)50　(D)100

解析：$\because$ $f(a)=2$ 且 $f(b)=5$

$\therefore 3^a=2$ 且 $3^b=5$

故 $f(a+2b)=3^{a+2b}=3^a\times 3^{2b}=2\times(3^b)^2=2\times 5^2=2\times 25=50$

15. (B)下列何者是方程式 $\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ 2 & x & 2 \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix}=0$ 的一根？　(A)2　(B)1　(C)0　(D)-1

解析：$\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ 2 & x & 2 \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix}=x^3+6+6-x-6x-6x=x^3-13x+12$

(A)╳：$\because$ $x=2$ 代入 $x^3-13x+12$ 得 $8-26+12\neq 0$

$\therefore 2$ 不是 $x^3-13x+12=0$ 的一根

(B)○：$\because$ $x=1$ 代入 $x^3-13x+12$ 得 $1-13+12=0$

$\therefore 1$ 是 $x^3-13x+12=0$ 的一根

(C)╳：$\because$ $x=0$ 代入 $x^3-13x+12$ 得 $0-0+12\neq 0$

$\therefore 0$ 不是 $x^3-13x+12=0$ 的一根

(D)╳：$\because$ $x=-1$ 代入 $x^3-13x+12$ 得 $-1+13+12\neq 0$

$\therefore -1$ 不是 $x^3-13x+12=0$ 的一根

16. (C)已知 $\vec{a}=(1,2,-3)$、$\vec{b}=(x,-6,z)$，若 $\vec{a}//\vec{b}$，則 $x+z=?$　(A)-12　(B)-6　(C)6　(D)12

解析：$\because$ $\vec{a}//\vec{b}$

$\therefore \dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{-6}=\dfrac{-3}{z}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{-3}\Rightarrow x=-3\\[2mm] \dfrac{1}{-3}=\dfrac{-3}{z}\Rightarrow z=9\end{cases}$

故 $x+z=(-3)+9=6$

17. (B) 設 $a=\log_{0.3}\frac{6}{5}$ 、 $b=\log_{0.3}\frac{4}{3}$ 、 $c=\log_{0.3}\frac{7}{6}$ ，試問 a 、 b 、 c 的大小關係為何？

(A) $a<c<b$　(B) $b<a<c$　(C) $c<a<b$　(D) $c<b<a$

解析： $\because \frac{4}{3}>\frac{6}{5}>\frac{7}{6}$ 且底數 $0.3<1$

$\therefore \log_{0.3}\frac{4}{3}<\log_{0.3}\frac{6}{5}<\log_{0.3}\frac{7}{6}$ ，故 $b<a<c$

18. (B) 已知 $A(2,1,2)$ 、 $B(3,1,3)$ 為空間中兩點，若 P 為 z 軸上一點，且 $\overline{PA}=\overline{PB}$ ，則 P 點坐標為何？　(A) $(0,5,0)$　(B) $(0,0,5)$　(C) $(7,0,0)$　(D) $(0,0,7)$

解析：設 $P(0,0,t)$ ，$\because \overline{PA}=\overline{PB}$

$\therefore \sqrt{(2-0)^2+(1-0)^2+(2-t)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(1-0)^2+(3-t)^2}$

$\Rightarrow 4+1+4-4t+t^2=9+1+9-6t+t^2 \Rightarrow 2t=10 \Rightarrow t=5$

故 $P(0,0,5)$

19. (C) 已知 $A(3,t,5)$ 、 $B(5,1,3)$ 為空間中兩點，若 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{17}$ ，則 $t=?$　(A)0 或 -2　(B) -1 或 3　(C) -2 或 4　(D) -4 或 2

解析： $\overrightarrow{AB}=(5-3,1-t,3-5)=(2,1-t,-2)$ 、 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+(1-t)^2+(-2)^2}$

$\because |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{17}$

$\therefore \sqrt{2^2+(1-t)^2+(-2)^2}=\sqrt{17} \Rightarrow 4+(1-t)^2+4=17 \Rightarrow (1-t)^2=9$

$\Rightarrow 1-t=3$ 或 $1-t=-3 \Rightarrow t=-2$ 或 4

20. (C) 已知 $y=a^x$ 通過點 $(2,5)$ 且 $a>0$，若 $y=\log_a x$ 通過點 $(5,b)$ 、 $(c,4)$，則 $bc=?$　(A)30　(B)40　(C)50　(D)60

解析： $\because y=a^x$ 通過點 $(2,5)$ ，$\therefore 5=a^2$

$\because y=\log_a x$ 通過點 $(5,b)$ 、 $(c,4)$ ，$\therefore a^b=5$ 、 $a^4=c$

由 $5=a^2$ 、 $a^b=5$ 可得 $b=2$ ，又 $c=a^4=(a^2)^2=5^2=25$

故 $bc=2\times 25=50$

二、填充題

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 5 \\ 6 & 7 & 15 \end{vmatrix} =$ ________。

答案：-30

解析：

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 5 \\ 6 & 7 & 15 \end{vmatrix} = 2\times 5\times \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

提出 2　提出 5

$$= 10(15+28+9-30-7-18) = 10\times(-3) = -30$$

2. 兩平面 $E_1 : x+2y+2z+4=0$ 與 $E_2 : 3x+6y+6z=33$ 的距離為________。

答案：5

解析：$E_1 : x+2y+2z+4=0$、$E_2 : x+2y+2z-11=0$

依兩平行平面的距離公式，可得距離為 $\dfrac{|4-(-11)|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \dfrac{15}{3} = 5$

3. 若 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 8 & 1 & b \\ 27 & 2 & c \end{vmatrix} = 9$，則 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 8 & 1 & b+3 \\ 27 & 2 & c \end{vmatrix} =$ ________。

答案：3

解析：$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 8 & 1 & b+3 \\ 27 & 2 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 8 & 1 & b \\ 27 & 2 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 3 \\ 27 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 9+0+0+0-0-6-0 = 3$

4. 若 $\log_{(2x-1)} 4 = 2$，則 $x =$ ________。

答案：$\dfrac{3}{2}$

解析：$\log_{(2x-1)} 4$ 有意義 $\Leftrightarrow 2x-1>0$ 且 $2x-1\neq 1$

由 $\log_{(2x-1)} 4 = 2$ 可得 $(2x-1)^2 = 4 \Rightarrow 2x-1 = 2$ 或 -2（不合，$\because 2x-1>0$）

故 $2x = 3 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

5. 已知兩向量 $\vec{a}=(6,0,5)$、$\vec{b}=(3,1,2)$，則 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影為________。

答案：$(6,2,4)$

解析：$\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}=\left(\dfrac{18+0+10}{9+1+4}\right)(3,1,2)=(6,2,4)$

6. 已知空間中四點 $O(0,0,0)$、$A(2,-1,0)$、$B(4,-1,-1)$、$C(2,2,3)$，則

(1)由 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 三向量所張出之平行六面體的體積為________。

(2) C 點到平面 OAB 的距離為________。

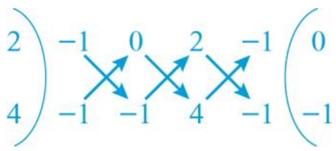
答案：(1)12　(2)4

解析：(1) $\overrightarrow{OA}=(2,-1,0)$、$\overrightarrow{OB}=(4,-1,-1)$、$\overrightarrow{OC}=(2,2,3)$

$$所求=\left|\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 4 & -1 & -1\\ 2 & 2 & 3\end{vmatrix}\right|=|(-6)+0+2-0-(-4)-(-12)|=12$$

(2) $12=$（由 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 所張出的平行四邊形面積）$\times$ C 點到平面 OAB 的距離

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\left(\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & -1\end{vmatrix}\right)=(1,2,2)$$



由 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 所張出的平行四邊形面積 $=|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$

$$所求=\frac{12}{3}=4$$

7. 已知 a、b 為正數，若 $\dfrac{\sqrt[4]{a^3b}\times\sqrt[3]{a^2b}}{a^{-1}b}=a^m b^n$，則 $m+n=$____。

答案：2

解析：$\because \dfrac{\sqrt[4]{a^3b}\times\sqrt[3]{a^2b}}{a^{-1}b}=\dfrac{(a^3b)^{\frac{1}{4}}\times(a^2b)^{\frac{1}{3}}}{a^{-1}b}=\dfrac{a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{a^{-1}b}=\dfrac{a^{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}\times b^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}}{a^{-1}b}=\dfrac{a^{\frac{17}{12}}\times b^{\frac{7}{12}}}{a^{-1}b}$

$=a^{\frac{17}{12}-(-1)}\times b^{\frac{7}{12}-1}=a^{\frac{29}{12}}b^{\frac{-5}{12}}$

$\therefore m+n=\dfrac{29}{12}+\left(\dfrac{-5}{12}\right)=2$

8. 若 $\log_4(x-2)+\log_4(x+1)=1$，則 $x=$________。

答案：3

解析：$\log_4(x-2)$有意義$\Leftrightarrow x-2>0 \Leftrightarrow x>2 \cdots\cdots①$

$\log_4(x+1)$有意義$\Leftrightarrow x+1>0 \Leftrightarrow x>-1 \cdots\cdots②$

由①、②可得$x>2$

$\because \log_4(x-2)+\log_4(x+1)=1 \Rightarrow \log_4[(x-2)(x+1)]=\log_4 4$

$\therefore (x-2)(x+1)=4 \Rightarrow x^2-x-2=4 \Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow (x-3)(x+2)=0$

$\Rightarrow x=3$或-2（不合，$\because x>2$）

故$x=3$

9. 已知兩向量$\overset{\vee}{a}=(1,2,3)$、$\overset{\vee}{b}=(-1,1,2)$，則$\overset{\vee}{a}\times\overset{\vee}{b}=$________。

答案：$(1,-5,3)$

解析：$\overset{\vee}{a}\times\overset{\vee}{b}=(\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & 1\\2 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 2\\-1 & 1\end{vmatrix})=(1,-5,3)$

10. 若$\log_{x-1}(2x-3)$有意義，則x的範圍為________________。

答案：$x>\frac{3}{2}$且$x\neq 2$

解析：$\log_{x-1}(2x-3)$有意義$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \text{且} x-1\neq 1 \\ 2x-3>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \text{且} x\neq 2 \\ x>\frac{3}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x>\frac{3}{2}$且$x\neq 2$

11. $(\frac{49}{25})^{-0.5}=$____。

答案：$\frac{5}{7}$

解析：$(\frac{49}{25})^{-0.5}=[(\frac{7}{5})^2]^{-0.5}=(\frac{7}{5})^{2\times(-0.5)}=(\frac{7}{5})^{-1}=\frac{5}{7}$

12. 行列式$\begin{vmatrix}1 & 3 & -9\\-2 & 0 & 1\\11 & 0 & -8\end{vmatrix}=$________。（利用降階法）

答案：-15

解析：原式$=-3\times\begin{vmatrix}-2 & 1\\11 & -8\end{vmatrix}=-3\times[(-2)\times(-8)-1\times 11]=-15$

13. 由三向量$\overset{\vee}{a}=(2,8,-4)$、$\overset{\vee}{b}=(1,-1,3)$、$\overset{\vee}{c}=(15,-10,5)$所張出之平行六面體的體積

$V=$________。

答案：350

解析：$V=\left|\begin{vmatrix}2 & 8 & -4\\1 & -1 & 3\\15 & -10 & 5\end{vmatrix}\right|=\left|2\times5\times\begin{vmatrix}1 & 4 & -2\\1 & -1 & 3\\3 & -2 & 1\end{vmatrix}\right|$

$=\left|2\times5\times(-1+4+36-6+6-4)\right|=\left|10\times35\right|=350$

14. 設 $a=\log_3 2$、$b=\log_4 1$、$c=\log_2 3$，則 a、b、c 的大小關係為________。

答案：$c>a>b$

解析：由題意知 $3^a=2$、$4^b=1$、$2^c=3$

$\because 3^0=1<3^a=2<3=3^1$，$\therefore 0<a<1$……①

$\because 4^b=1=4^0$，$\therefore b=0$……②

$\because 2^1=2<2^c=3<4=2^2$，$\therefore 1<c<2$……③

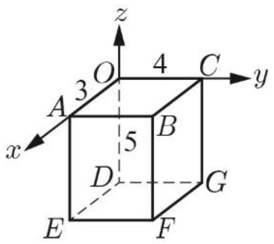
由①、②、③可得 $c>a>b$

15. 如圖所示，長方體 $OABC$-$DEFG$ 中，$\overline{OA}=3$、$\overline{OC}=4$、$\overline{OD}=5$，

(1) $|\overrightarrow{CE}|=$________。

(2) $2\overrightarrow{CE}-3\overrightarrow{OF}=$________。

(3)若 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{CE}-3\overrightarrow{OF}$，則 P 點坐標為________。



答案：(1) $5\sqrt{2}$　(2) $(-3,-20,5)$　(3) $(0,-20,5)$

解析：(1) $\because C(0,4,0)$、$E(3,0,-5)$

$\therefore \overrightarrow{CE}=(3-0,0-4,-5-0)=(3,-4,-5)\Rightarrow|\overrightarrow{CE}|=\sqrt{3^2+(-4)^2+5^2}=5\sqrt{2}$

(2) $\because O(0,0,0)$、$F(3,4,-5)$，$\therefore \overrightarrow{OF}=(3-0,4-0,-5-0)=(3,4,-5)$

$2\overrightarrow{CE}-3\overrightarrow{OF}=2(3,-4,-5)-3(3,4,-5)=(6,-8,-10)-(9,12,-15)$

$=(6-9,-8-12,-10-(-15))=(-3,-20,5)$

(3)設 P 點坐標為 (x,y,z)，$\because A(3,0,0)$、$P(x,y,z)$

$\therefore \overrightarrow{AP}=(x-3,y-0,z-0)=(x-3,y,z)$，又 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{CE}-3\overrightarrow{OF}=(-3,-20,5)$

$$\therefore \begin{cases} x-3=-3 \\ y=-20 \\ z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-20 \\ z=5 \end{cases}$$

故 P 點坐標為 $(0,-20,5)$

16. 若 $(\frac{1}{9})^{x-4}=3^{3-x}$，則 $x=$________。

答案：5

解析：$\because (\frac{1}{9})^{x-4}=3^{3-x} \Rightarrow (3^{-2})^{x-4}=3^{3-x} \Rightarrow 3^{-2x+8}=3^{3-x}$

$\therefore -2x+8=3-x \Rightarrow -x=-5 \Rightarrow x=5$

17. 若 $4^x-2^x-6=0$，則 $2^x=$________。

答案：3

解析：令 $t=2^x>0$，則 $4^x=(2^2)^x=(2^x)^2=t^2$

$\because 4^x-2^x-6=0$

$\therefore t^2-t-6=0 \Rightarrow (t-3)(t+2)=0 \Rightarrow t=3$ 或 -2（不合，$\because t=2^x>0$）

故 $t=3$，即 $2^x=3$

18. 兩平面 $E_1: x-2y-2z+3=0$ 與 $E_2: x-2y-2z+9=0$ 的距離為________。

答案：2

解析：依距離公式可得 $\dfrac{|3-9|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=\dfrac{6}{3}=2$

19. 已知平面 E 的法向量為 $\vec{n}=(2,3,-2)$，且 $A(1,1,2)$ 為 E 上一點，則平面 E 的方程式為________________。

答案：$2x+3y-2z-1=0$

解析：由點法式知 $2(x-1)+3(y-1)-2(z-2)=0$，整理得 $2x+3y-2z-1=0$

20. 若 $3^{2x+1}-10\cdot 3^x+3=0$，則 $x=$________。

答案：± 1

解析：令 $t=3^x>0$，則 $3^{2x+1}=3^{2x}\cdot 3^1=(3^x)^2\cdot 3=t^2\cdot 3=3t^2$

$\because 3^{2x+1}-10\cdot 3^x+3=0$

$\therefore 3t^2-10t+3=0 \Rightarrow (3t-1)(t-3)=0 \Rightarrow t=\frac{1}{3}$ 或 3

即 $3^x=\frac{1}{3}$ 或 $3 \Rightarrow 3^x=3^{-1}$ 或 3^1

故 $x=\pm 1$

21. 已知 $\overrightarrow{i}=(1,0,0)$、$\overrightarrow{j}=(0,1,0)$、$\overrightarrow{k}=(0,0,1)$、$\overrightarrow{a}=(-1,2,3)$，若 $\overrightarrow{a}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}$，其中 x、y、z 均為實數，則 $x+y+z=$________。

答案：4

解析：$\because \overrightarrow{a}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}$

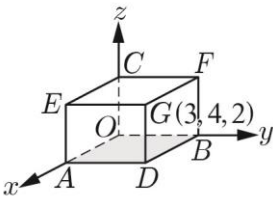
$\therefore (-1,2,3)=x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)$

$=(x,0,0)+(0,y,0)+(0,0,z)=(x,y,z)$

$\Rightarrow x=-1$、$y=2$、$z=3$

故 $x+y+z=(-1)+2+3=4$

22. 如圖所示，空間中的一個長方體，若 G 點坐標為 $(3,4,2)$，則 A 點坐標為________、B 點坐標為________、D 點坐標為________、E 點坐標為________。



答案：$A(3,0,0)$、$B(0,4,0)$、$D(3,4,0)$、$E(3,0,2)$

解析：$A(3,0,0)$、$B(0,4,0)$、$D(3,4,0)$、$E(3,0,2)$

23. 若 $\log_a 3-\log_a 12=2$，則 $a=$________。

答案：$\frac{1}{2}$

解析：$\log_a 3$ 有意義 $\Leftrightarrow a>0$ 且 $a\neq 1$

$\log_a 12$ 有意義 $\Leftrightarrow a>0$ 且 $a\neq 1$

由 $\log_a 3-\log_a 12=2 \Rightarrow \log_a(\frac{3}{12})=2 \Rightarrow \log_a \frac{1}{4}=2$

可得 $a^2=\frac{1}{4} \Rightarrow a=\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$（不合，$\because a>0$）

故 $a=\frac{1}{2}$

24. 若 $a>0$ 且 $a^x=3$，則 $a^{2x}-a^{-2x}=$____。

答案：$\frac{80}{9}$

解析：$\because a^{2x}=(a^x)^2=3^2=9$

$\therefore a^{2x}-a^{-2x}=9-\frac{1}{9}=\frac{80}{9}$

25. 試求下列各式之值：

(1) $(5^4\times 7^6)^0\times 2^{-2}=$________。

(2) $\sqrt[3]{27}=$________。

答案：(1) $\frac{1}{4}$　(2)3

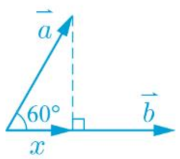
解析：(1) $(5^4\times7^6)^0\times2^{-2}=1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

(2) $\sqrt[3]{27}=(3^3)^{\frac{1}{3}}=3$

26. 已知$|\vec{a}|=10$，若$\vec{a}$與$\vec{b}$的夾角為$60°$，則$\vec{a}$在$\vec{b}$上的正射影長為________。

答案：5

解析：設$\vec{a}$在$\vec{b}$上的正射影長為x



則$\frac{x}{|\vec{a}|}=\cos60°\Rightarrow\frac{x}{10}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=5$

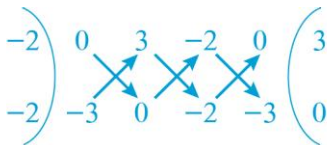
27. 已知空間中四點$A(4,2,0)$、$B(2,2,3)$、$C(2,-1,0)$、$D(k,-4,0)$都在平面E上，試求：
(1)平面E的方程式為________。
(2) $k=$________。

答案：(1) $3x-2y+2z-8=0$　(2)0

解析：(1) $\overrightarrow{AB}=(2-4,2-2,3-0)=(-2,0,3)$

$\overrightarrow{AC}=(2-4,(-1)-2,0-0)=(-2,-3,0)$

$\because\ \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}0&3\\-3&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&-2\\0&-2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2&0\\-2&-3\end{vmatrix}\right)=(9,-6,6)=3(3,-2,2)$



$\therefore(3,-2,2)$是平面E的法向量
利用點法式，得平面E的方程式為$3(x-4)+(-2)(y-2)+2(z-0)=0$
即$E:3x-2y+2z-8=0$
(2) $\because\ D(k,-4,0)$在平面$E:3x-2y+2z-8=0$上
$\therefore 3k-2\times(-4)+2\times0-8=0\Rightarrow k=0$

28. $2^{\frac{\log_3 1}{\log_3 4}}=$________。

答案：1

解析：$2^{\frac{\log_3 1}{\log_3 4}}=2^{\log_4 1}=2^0=1$

29. 行列式$\begin{vmatrix}1 & -3 & -2\\ 2 & -1 & 4\\ -5 & 9 & 7\end{vmatrix}=$________。

答案：33

解析：原式$=-7-36+60-(-10)-(-42)-36=33$

30. 已知$A(1,-3,3)$、$B(2,3,4)$、$C(3,5,7)$為空間中三點，若M為$\overline{AC}$的中點，則$\overline{BM}=$________。

答案：$\sqrt{5}$

解析：$\because M$ 為$\overline{AC}$的中點

$\therefore M(\frac{1+3}{2},\frac{(-3)+5}{2},\frac{3+7}{2})$，即$M(2,1,5)$

$\overline{BM}=\sqrt{(2-2)^2+(1-3)^2+(5-4)^2}=\sqrt{0+4+1}=\sqrt{5}$

31. 設$a=\sqrt{3}$、$b=\sqrt{\sqrt{27}}$、$c=3^{-1}$，則a、b、c的大小關係為________。

答案：$b>a>c$

解析：$a=\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$、$b=\sqrt{\sqrt{27}}=(\sqrt{27})^{\frac{1}{2}}=(27^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=27^{\frac{1}{4}}=(3^3)^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{3}{4}}$

$\because \frac{3}{4}>\frac{1}{2}>-1$且底數$3>1$

$\therefore 3^{\frac{3}{4}}>3^{\frac{1}{2}}>3^{-1}$，故$b>a>c$

32. 已知空間坐標中$A(1,-2,5)$、$B(2,5,-2)$兩點，若C是x軸上一點且$\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$，則$C$點坐標為________。

答案：$(6,0,0)$或$(-3,0,0)$

解析：設$C(t,0,0)$，則$\overrightarrow{CA}=(1-t,-2,5)$、$\overrightarrow{CB}=(2-t,5,-2)$

$\because \overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$

$\therefore \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0 \Rightarrow (1-t)(2-t)+(-2)\times 5+5\times(-2)=0$

$\Rightarrow 2-t-2t+t^2-10-10=0$

$\Rightarrow t^2-3t-18=0 \Rightarrow (t-6)(t+3)=0 \Rightarrow t=6$ 或 -3

故 C 點坐標為 $(6,0,0)$ 或 $(-3,0,0)$

33. $a=(\sqrt{5})^{12}$ 、 $b=(\sqrt{5})^{-13}$ 、 $c=(\sqrt{5})^{10}$ 的大小關係為________。

答案：$a>c>b$

解析：底數 $\sqrt{5}>1$ 且 $12>10>-13$，所以大小關係為 $a>c>b$

34. 已知 $\vec{a}=(1,1,1)$ 、 $\vec{b}=(1,-1,-1)$ ，則 $|\vec{a}\cdot\vec{b}|^2+|\vec{a}\times\vec{b}|^2=$________。

答案：9

解析：令 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 θ

則 $|\vec{a}\cdot\vec{b}|^2=(|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta$ 、 $|\vec{a}\times\vec{b}|^2=(|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta)^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta$

故 $|\vec{a}\cdot\vec{b}|^2+|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta+|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$

$=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\times 1=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$

$=(\sqrt{1^2+1^2+1^2})^2(\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2})^2$

$=3\times 3=9$

35. 若 $\log_x 3=-1$ ，則 $x=$________。

答案：$\dfrac{1}{3}$

解析：$\log_x 3$ 有意義 $\Leftrightarrow x>0$ 且 $x\neq 1$

由 $\log_x 3=-1$ 可得 $x^{-1}=3$

即 $\dfrac{1}{x}=3$ ，故 $x=\dfrac{1}{3}$

36. xy 平面與 yz 平面的夾角為________。

答案：$90°$

解析：$\because$ xy 平面與 yz 平面垂直

$\therefore$ xy 平面與 yz 平面的夾角為 $90°$

37. $\log_3 6+\log_3 81-\log_3 18=$________。

答案：3

解析：$\log_3 6+\log_3 81-\log_3 18=\log_3(6\times 81)-\log_3 18=\log_3(\dfrac{6\times 81}{18})=\log_3 27=3$

38. 若兩向量 $\vec{a}=(1,3,k)$、$\vec{b}=(3,1,3)$ 互相垂直，則 $k=$________。

答案：-2

解析：兩向量垂直 $\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Rightarrow 3+3+3k=0 \Rightarrow k=-2$

39. $a=\log_{0.4}\frac{1}{2}$、$b=\log_{0.4}3$、$c=\log_{0.4}4$ 的大小關係為________。

答案：$a>b>c$

解析：底數 $0<0.4<1$ 且 $4>3>\frac{1}{2}$

所以大小關係為 $a>b>c$

40. 若 $\log_x(6-x)$ 有意義，則 x 的範圍為________________。

答案：$0<x<6$ 且 $x\neq 1$

解析：$\begin{cases} x>0 \text{ 且 } x\neq 1 \\ 6-x>0 \end{cases}$

$\Rightarrow 0<x<6$ 且 $x\neq 1$